

文字與算式表徵對數學科普文本閱讀效益與效率的影響

吳昭容¹、江健豪²、楊文金³

^{1,2}國立臺灣師範大學教育心理與輔導研究所

³國立臺灣師範大學科學教育研究所

^{1,2}Tel: 02-77343777

³Tel: 02-77346803

¹cjwu@ntnu.edu.tw

²66rabbit@gmail.com

³wgy@ntnu.edu.tw

摘要

科普文章說明數學概念可以用算式也可以採文字，兩種表徵何者較有效益？或較有效率？69名大學生與研究生在閱讀理解測驗與眼球指標上顯示，兩種表徵的讀者在是非題的表現沒有差異，而算式版在計算題上未較文字版佳，而文字版在問答題上的回答品質則比算式版佳。眼動指標顯示兩組總閱讀時間無差，但算式版更仰賴讀圖，指出算式版更需要圖示提供訊息的可能性。上述結果指出算式雖然較為精簡，但閱讀效率未必較高，且其閱讀效益也可能較差，本文從數學表徵的多義性討論其可能的意義。

關鍵詞：表徵、閱讀理解、眼動指標

一、緒論

閱讀是人們獲得知識的途徑，數學科普文章是成人離開課室之後取得數學新知與欣賞數學之美的管道之一。學科閱讀 (literacy reading) 的文獻指出，不同學科的文本有特殊的閱讀特性 (Johnson & Watson, 2011; Shanahan & Shanahan, 2008)，數學擁有自己的符號、術語、語法、圖示，和基模，使得數學閱讀能力有別於文學或報導文體的閱讀能力 (Adams & Lowery, 2007)。Österholm (2006) 以高中與大學生為對象，探討數學符號表徵和文字表徵對文本閱讀理解的影響，發現在數學文章中符號表徵組的表現較差，且閱讀符號表徵所需技巧和文字閱讀能力的增長並不同步。

傳遞數學想法可以透過不同的表徵，算式或者文字，何者對成人較有效益 (effectiveness) 或較具效率 (efficiency)？本研究以閱讀理解測驗來評估閱讀效益，而以眼球追蹤技術的閱讀時間與路徑來評估閱讀效益。故本研究目的旨在探討 (1) 兩種表徵下閱讀理解測驗的表現差異 (含正確性或理解程度、反應時間)。(2) 兩種表徵下閱讀眼動指標的差異。

二、研究方法

(一) 受試者

網路招募非數學相關科系的大學生或研究生，系所背景多元。閱讀測驗部份共 69 名受試者，眼動資料在刪除眼動軌跡較為偏移者之後的有效樣本為 57 名。

(二) 實驗材料

包括文本、測驗題，與背景知識測驗。文本內容為推算地球半徑的數學史科普文章，分為文字和算式表徵兩種版本，**文字版**採用中文 (配合必要的數學符號) 敘述推算的道理，**算式版**則將其中五句改採算式的方式呈現，後文稱這五句為關鍵句，見圖 1 紅框，兩版有同樣的附圖。閱讀理解測驗包括 7 題是非題、1 題計算題，與 1 題問答題，是非題以文字或算式描述的問題各半，且畫面右邊保留原文本的附圖。

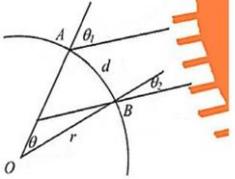
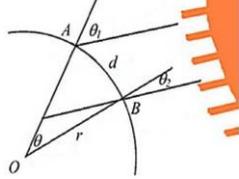
 <p>我們怎麼知道地球的半徑呢？古代有位數學家想出了一個聰明的方法，就是利用扇形的弧長 d、半徑 r，與圓心角 θ 之間的關係去推算地球的半徑。由於弧長是圓周長的一部份，且一個圓周的角度是 360°，故</p> <p>1 弧長可依圓心角佔 360° 的比率乘以圓周長求得，而</p> <p>2 角度 360° 以弧長表示就是 2π，所以，</p> <p>3 弧長等於所對應的圓心角弧長乘以半徑，如果測量地表上兩點的距離，即弧長 d，且能知道過此兩點之半徑的夾角，就可推算地球的半徑。至於夾角如何得知呢？</p> <p>假設陽光平行直射地球，令兩個人分別站在地球的位置 A 及其正南的位置 B，想像從兩人頭頂到腳底的延長線相交於地心 O，兩線的夾角為 θ。雖然我們無法直接測得 θ，但可透過太陽光線分別與這兩條延長線的夾角 θ_1、θ_2 來推算 θ，也就是由平行線同位角、補角、對頂角，以及三角形內角和性質求得 θ 為 θ_1 與 θ_2 的差。因此，可知</p> <p>5 地球半徑就是兩地距離除以這兩地陽光斜射夾角的差。</p>	 <p>我們怎麼知道地球的半徑呢？古代有位數學家想出了一個聰明的方法，就是利用扇形的弧長 d、半徑 r，與圓心角 θ 之間的關係去推算地球的半徑。由於弧長是圓周長的一部份，且一個圓周的角度是 360°，故</p> <p>1 $d = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$ 2 $\theta = \frac{360^\circ d}{2\pi r}$ 所以 3 $d = \theta \times r$</p> <p>如果測量地表上兩點的距離，即弧長 d，且能知道過此兩點之半徑的夾角，就可推算地球的半徑。至於夾角如何得知呢？假設陽光平行直射地球，令兩個人分別站在地球的位置 A 及其正南的位置 B，想像從兩人頭頂到腳底的延長線相交於地心 O，兩線的夾角為 θ。雖然我們無法直接測得 θ，但可透過太陽光線分別與這兩條延長線的夾角 θ_1、θ_2 來推算 θ，也就是由平行線同位角、補角、對頂角，以及三角形內角和性質求得 $\theta = \theta_1 - \theta_2$。因此，可知 $r = \frac{d}{\theta_1 - \theta_2}$</p>
文字表徵版	算式表徵版

圖 1 實驗材料及其表徵版本的差異

(三) 實驗程序

隨機分派受試者到兩種表徵的文本，採個別施測。指導語之後，受試者需進行眼球校正的程序，接著閱讀一篇練習文章與接受測驗後，開始正式實驗。讀完正式文本後，依序為是非題、計算題、問答題，七題是非題以隨機方式呈現。閱讀不限時，計算與問答題則依預試結果給予寬鬆的時間規範。最後施測背景知識測驗。

本實驗所用電腦螢幕為 19 吋液晶顯示器，解析度為 1024 × 768。受試者距離螢幕約 65 公分，實驗材料呈現在受試者寬 8.90 度與高 6.70 度的視角範圍內。

(四) 眼動資料的分析方法

分析區域 (interest of area) 由大到小劃分為三個層次。第一層是將整個畫面分成文區和圖區；第二層分析關鍵文區 (合併五句關鍵句) 與關鍵圖區。所謂關鍵圖區的界定方式為「從關鍵文區跳至圖區，包含繼續處理圖區的凝視點，例如圖 2 上實心圓圈；第三層則將五個關鍵句斷出詞來。最後，依據分析層次選擇適當的眼動指標，見表 1。

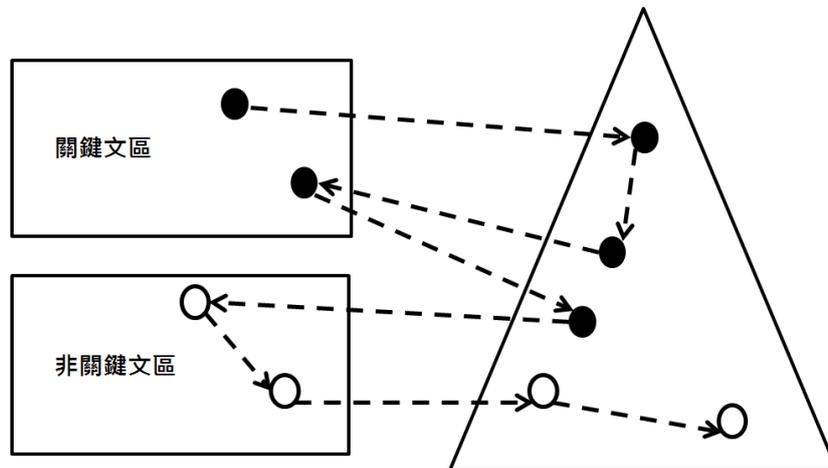


圖 2 關鍵圖區界定示意圖 (實心點為關鍵凝視；空心點為非關鍵凝視)

表 1 分析指標說明

1 總凝視時間	分析區內所有凝視點時間加總。
2 看圖比例	圖區總凝視時間佔文圖兩區加總凝視時間之比例。
3 詞間轉移機率	以關鍵斷詞為計算單位，運用 Markov 轉換機率概念，算出閱讀者凝視某詞後，下一步凝視的斷詞中，機率前三高者。

三、結果與分析

(一) 行為表現的結果

背景知識上，算式與文字版兩組受試者沒有顯著差異。是非題正確率與答題時間如表 2，以兩種表徵分別進行兩個依變項的單因子變異數分析，平均數差異均未顯著。計算題的正確率都不高 (算 16%，文 24%)，兩組未達顯著，與問答題依據說明計算地球半徑公式的嫻熟程度，區分為正確 (使用公式且說明意義) 與瑕疵 (包含公式使用錯誤、

說明闕漏、或未使用公式) 兩類，對其進行卡方考驗，結果文字版答題的表現較佳，兩類差異達顯著， $\chi^2_{.95, (1)} = 5.29, p < .05$ 。

表 2 兩種表徵之文本在是非題正確率與答題時間上的平均數與標準差

	文字表徵 (n = 34)		算式表徵 (n = 35)		合計	
	<i>M</i>	(<i>SD</i>)	<i>M</i>	(<i>SD</i>)	<i>M</i>	(<i>SD</i>)
正確率	.68	(0.15)	.69	(0.17)	.69	(0.16)
答題時間(秒)	20.45	(10.99)	20.66	(10.80)	20.56	(10.82)

(二) 圖文的閱讀比重有表徵效果

受試者眼動數據如表 3 所示，雖然兩個版本在全文本指標沒有差異，但分配圖區的時間呈現算式版 (.23) 較文字版 (.19) 花較多的時間在圖上的趨勢。此現象在進一步分析關鍵區時更為明顯，算式版關鍵區的看圖比例 (.26) 顯著比文字版 (.16) 高， $F(1, 55) = 7.39, p < .01$ 。此外，非關鍵區的考驗均無差異，顯示前述差異非來自兩組受試者閱讀能力或習慣的差異。

表 3 表徵在第一、二層的眼動指標之平均數與標準差 (灰底達統計顯著)

	文區 (n = 28)				圖區 (n = 29)				全區總和			
	文字		算式		文字		算式		文字		算式	
	<i>M</i>	(<i>SD</i>)	<i>M</i>	(<i>SD</i>)	<i>M</i>	(<i>SD</i>)	<i>M</i>	(<i>SD</i>)	<i>M</i>	(<i>SD</i>)	<i>M</i>	(<i>SD</i>)
全文本總凝視時間(秒)	84.65	49.69	72.71	39.80	20.86	18.70	24.72	22.13	105.50	66.36	97.43	57.97
全文本看圖比例									0.19	0.08	0.23	0.13
關鍵區總凝視時間(秒)	34.59	29.85	23.32	17.34	7.89	12.10	11.89	14.63	42.47	40.44	35.21	30.00
關鍵區看圖比例									0.16	0.14	0.29	0.20
非關鍵區總凝視時間(秒)	49.86	22.45	49.06	26.20	12.76	10.50	12.65	9.95	62.62	31.18	61.70	32.69
非關鍵區看圖比例									0.19	0.08	0.19	0.11

(三) 關鍵區文字版前三大轉移機率區都不包括圖，而算式版則經常轉移到圖區。

圖 3 為轉移路徑圖，可發現文字版關鍵區僅少數關鍵詞前三大機率轉移到圖；算式版則相反，顯示讀到數學符號時，多數讀者傾向參照附圖，這可以和前述結論相呼應。

四、討論

在閱讀效益上，算式與文字兩種表徵的操弄對是非題表現影響不大，而算式表徵對於計算的表現並未比文字版佳，實際的正確率還較差，文字的描述方式則有助於受試者理解公式並具體說明其含意。在整體閱讀效率上，兩種表徵的閱讀總時間沒有差異，但考量算式版的視覺刺激數量較文字版少的前提，可以推想算式的回視應較高，而從版本有差異的五個關鍵句的看圖比例可以發現，算式版參照圖的時間顯著較文字版來得多，顯示算式版更需要圖示提供訊息協助的可能性。

數學符號具多義性 (homonymy)，以本文第一個關鍵句為例， $d = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$ ，分

數部份必須喚起活化水準較低的比例模式，而非活化水準較高的部份整體模式，所以讀者容易找錯意義，而無法與前後文連貫，閱讀無法理解就需要不斷回視算式與看圖，企圖找出可以確定語意的線索。相對地，文字版，「弧長可依圓心角佔 360° 的比率乘以圓周長求得」，明確地指示了比例模式，讀者較容易掌握此一推算的原理。

	文字版	算式版
1	<p>弧長可依圓心角佔360°的比率乘以圓周長求得</p>	$d = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$
2	<p>角度360°以弧度表示就是2π</p>	$360^\circ = 2\pi$
3	<p>弧長等於所對應的圓心角弧度乘以半徑</p>	$d = \theta \times r$
4	<p>θ為θ_1與θ_2的差</p>	$\theta = \theta_1 - \theta_2$
5	<p>地球半徑就是兩地距離除以這兩地陽光斜射夾角的差</p>	$r = \frac{d}{\theta_1 - \theta_2}$

圖例說明：紅箭頭為最大轉移機率的路徑，為方便瀏覽，若最大機率轉移到圖區，則在該詞的右上角打上紅色的勾，若在第二或第三大機率轉移到圖，則打上綠色的勾。

圖 3 轉移路徑圖

五、參考文獻（略）